Trigonometrie

Laura Katzensteiner

Mary Maxion

Kristina Goliasch

3BBIK 2010/2011

Wofür Trigonometrie?

Mithilfe der trigonomischen Formeln kann man sich im **rechtwinkeligen Dreieck** sowohl Winkelgrößen als auch Seitenlängen ausrechnen.

In der Praxis verwenden Experten Trigonometrie um Gelände zu vermessen.

Winkelfunktionen

- sin α – „Sinus Alpha“ $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$
- cos α – „Cosinus Alpha“ $\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$
- tan α – „Tangens Alpha“ $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$

Das rechtwinkelige Dreieck I

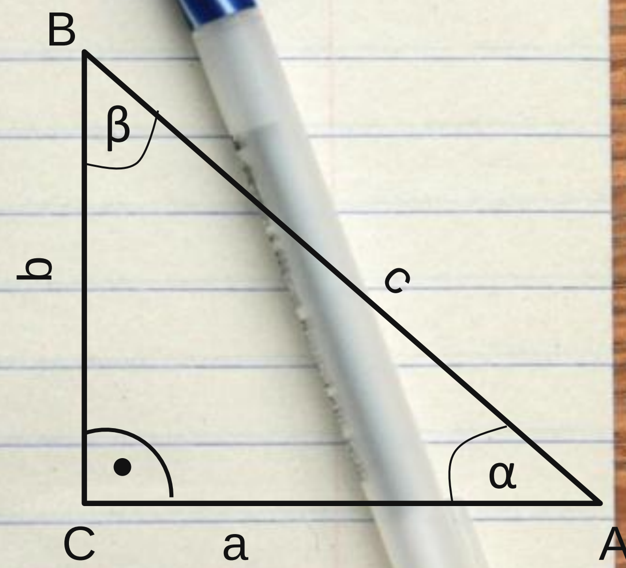
Erklärung

Formeln

Beispiele

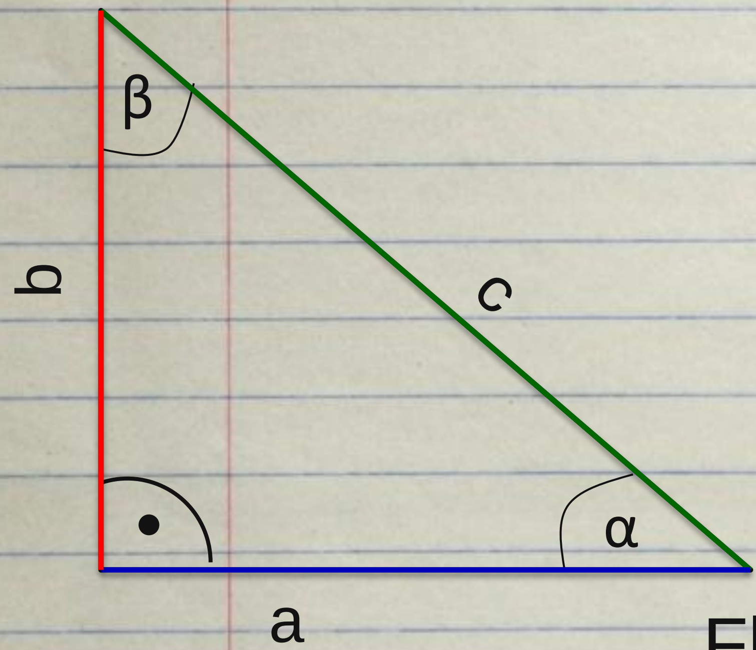
Was ist das?

Das rechtwinkelige Dreieck zeichnet sich aufgrund des rechten Winkels im Eckpunkt C aus.



Addiert man α und β ergibt die Winkelsumme 90° - rechter Winkel.

Formeln



(• = γ)

$$\sin \alpha \quad \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos \alpha \quad \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan \alpha \quad \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Flächeninhalt: $\frac{a*b}{2}$

Winkelsumme: $\alpha+\beta=\gamma=90°$

Satz des Pythagoras: $a^2+b^2=c^2$

Beispiel

gegeben ist

a = 40 cm

b = 35 cm

gesucht ist

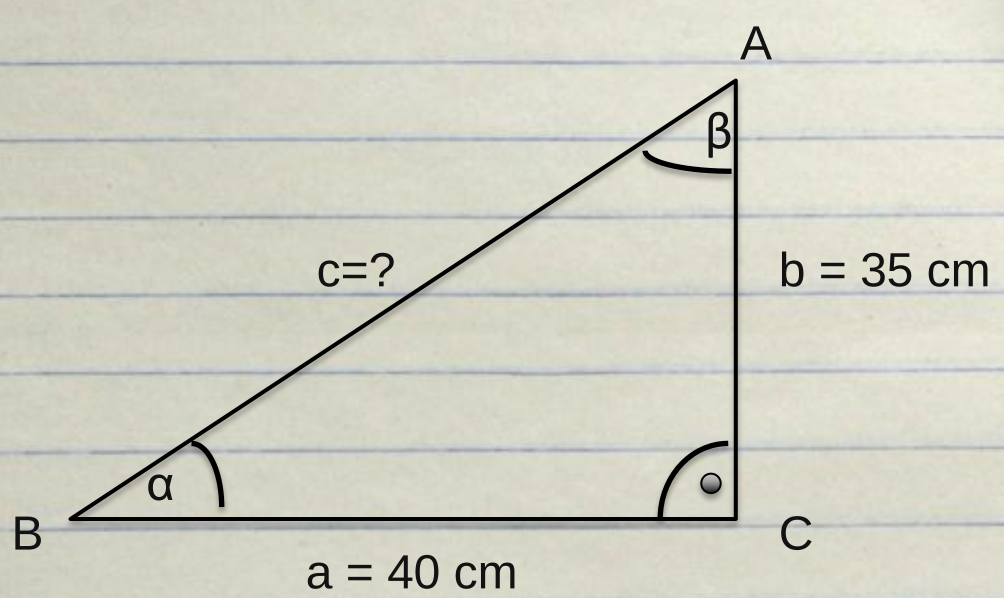
c = ?

α = ?

β = ?

A =?

Skizze



Lösung

$$\tan\alpha = \frac{35}{40}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{35}{40}\right)$$

$$\alpha = 41{,}2°$$

$$\sin\beta = \frac{40}{53{,}2}$$

$$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{40}{53{,}2}\right)$$

$$\beta = 48{,}8°$$

$$\cos 41{,}2° = \frac{40}{c}$$

$$c = \frac{40}{\cos 41{,}2°}$$

$$c = 53{,}2 \text{ cm}$$

$$A = \frac{40 * 35}{2}$$

$$A = 700 \text{ cm}^2$$

HINWEIS: Zur Lösung des Beispiels wurden zur Demonstration alle möglichen Winkelfunktionen verwendet. In der Praxis wählt man die, die am leichtesten anzuwenden ist, bzw. wo die meisten Informationen gegeben sind.

Das gleichschenkelige Dreieck

Erklärung

Formeln

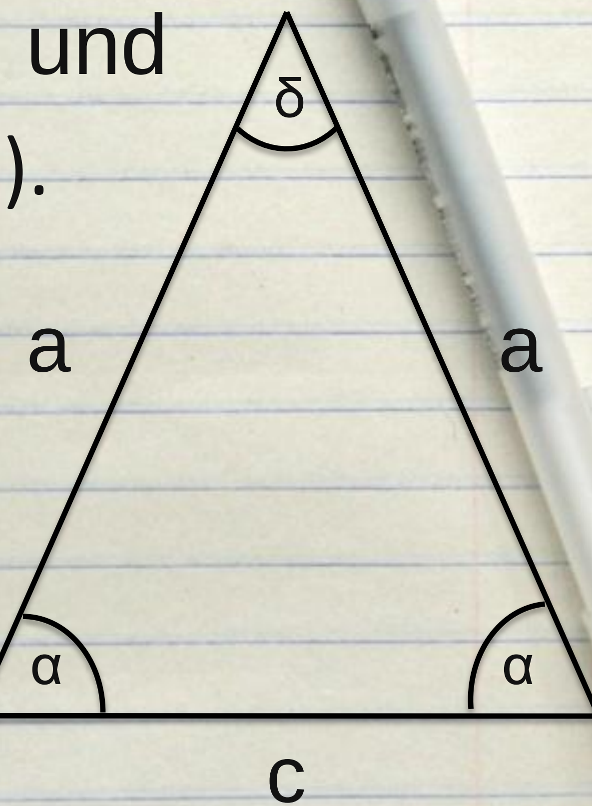
Beispiele

Was ist das?

Ein gleichschenkeliges Dreieck hat

2 gleich lange Seiten (a=b) und

2 gleich große Winkel (α=β).



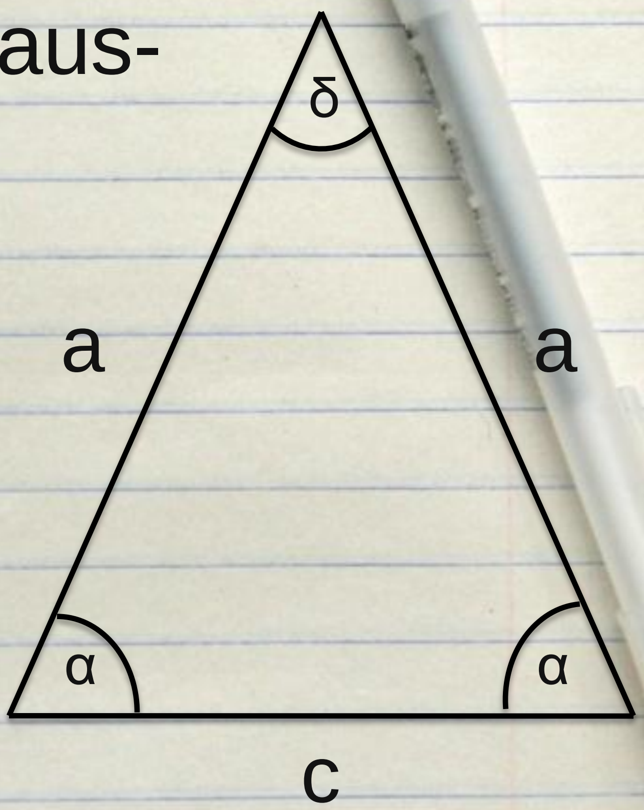
Der dritte Winkel δ ergänzt

die 180° des Dreiecks.

Die Winkel

Nicht immer sind alle Winkel gegeben und müssen deshalb erst aus-gerechnet werden.

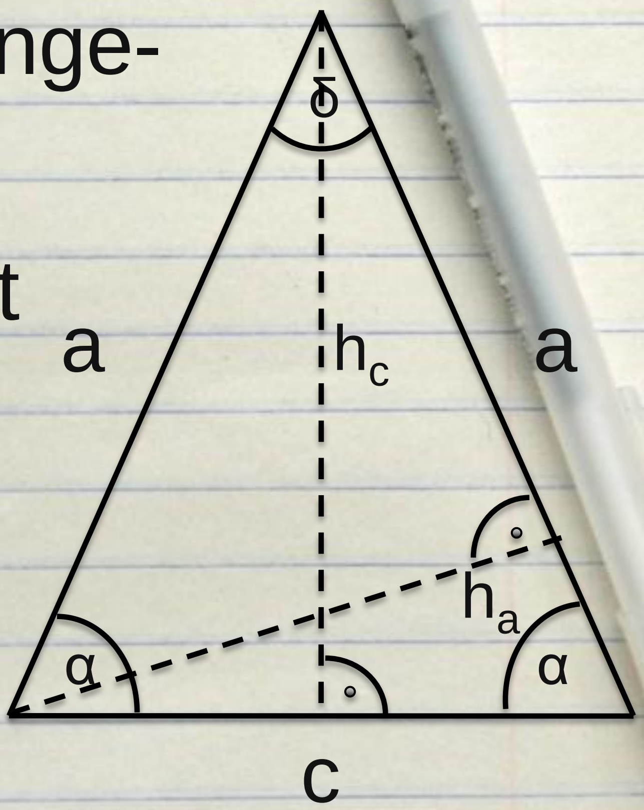
Um die fehlenden Winkel ausrechnen zu können, brauchen wir die Winkel-funktionen.



Die Winkelfunktionen

Diese Funktionen können nur im rechtwinkeligen Dreieck ange-wendet werden.

Deshalb helfen wir uns mit den Höhen h_c oder h_a.

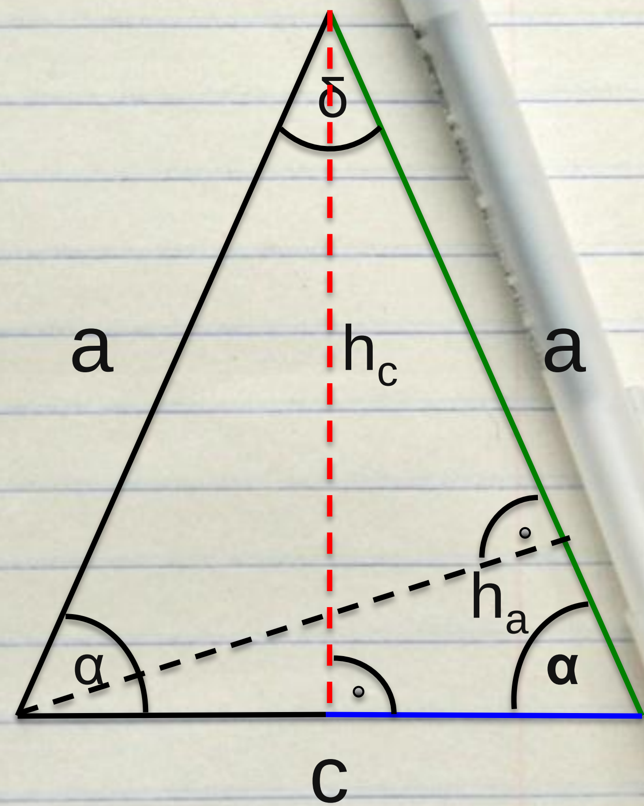


Formeln

$$\tan\boldsymbol{\alpha} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\sin\boldsymbol{\alpha} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos\boldsymbol{\alpha} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$



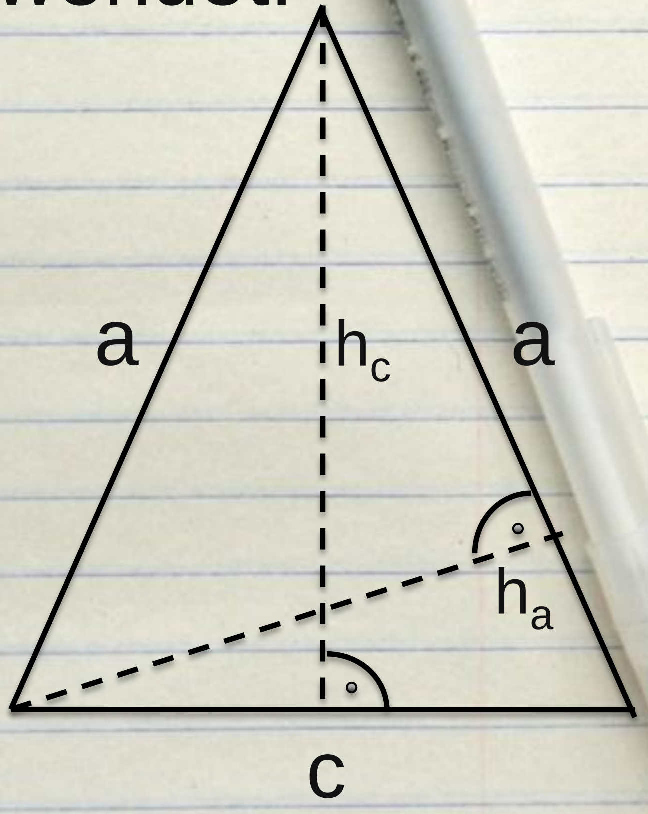
Formeln II

Für die Berechnung der Fläche wird folgende Formel verwendet:

$$A = \frac{c*h_c}{2}$$

oder

$$A = \frac{a*h_a}{2}$$



Beispiel

gegeben ist im gleichschenkeligen Dreieck

$a = 53cm$

$\alpha = 58°$

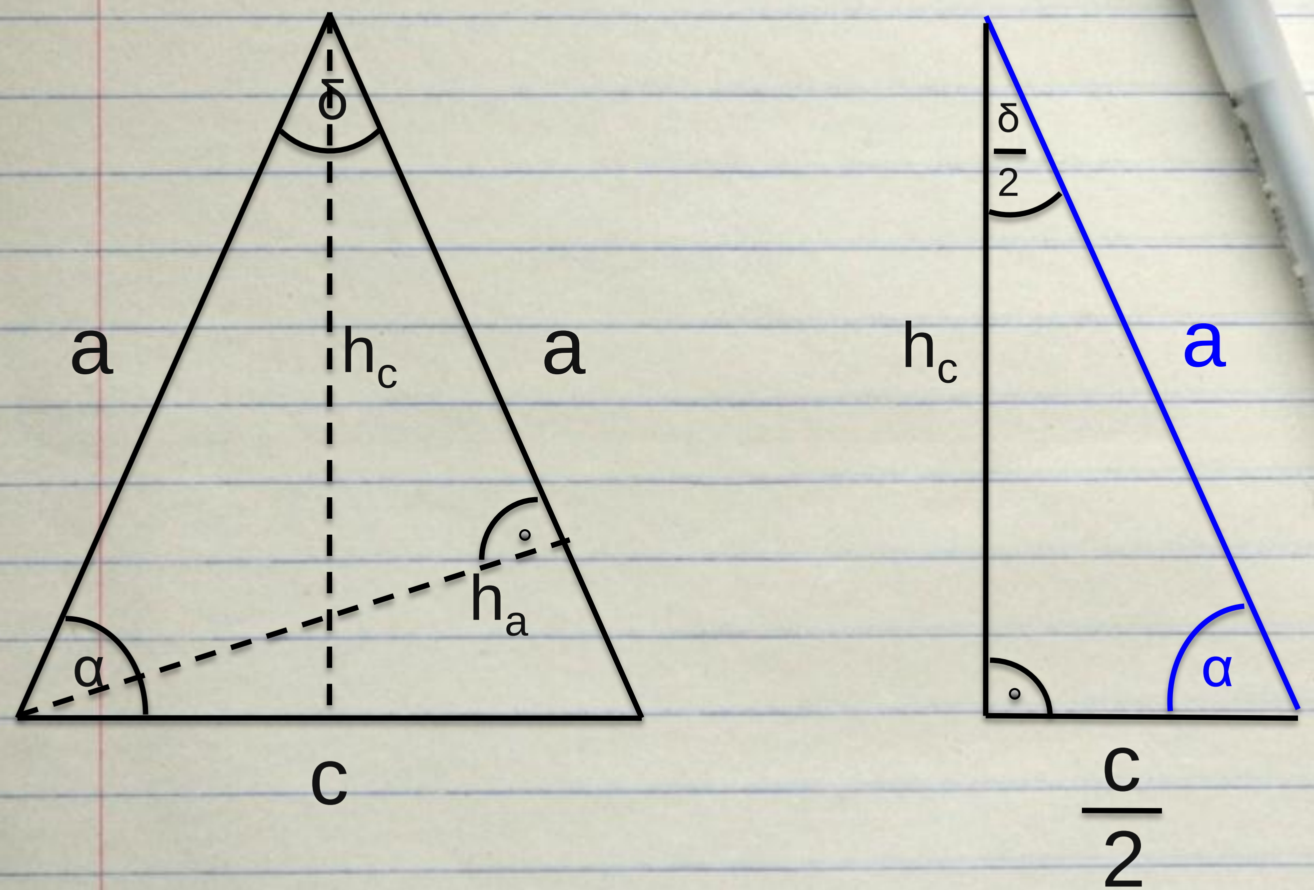
gesucht ist

$c = ?$

$\delta = ?$

$A = ?$

Skizze



Lösung

$\sin\alpha = \frac{h_c}{a}$

$\sin 58° = \frac{h_c}{53}$

$h_c = 45cm$

$A = \frac{c*h_c}{2}$

$A = \frac{56*45}{2}$

$A = 1.260cm^2$

$h_c^2 + (\frac{c}{2})^2 = a^2$

$\frac{c}{2} = \sqrt{a^2 - h_c^2} \quad /*2$

$c = 56cm$

Da wir für die Berechnung des Flächeninhaltes die Seite c brauchen, müssen wir zuerst h_c ausrechnen. Mit h_c können wir dann mit dem Satz des Pythagoras die fehlende Seite c ausrechnen.

Beispiel II

gegeben ist im gleichschenkeligen Dreieck

$a = 10,9cm$

$A = 54,6cm^2$

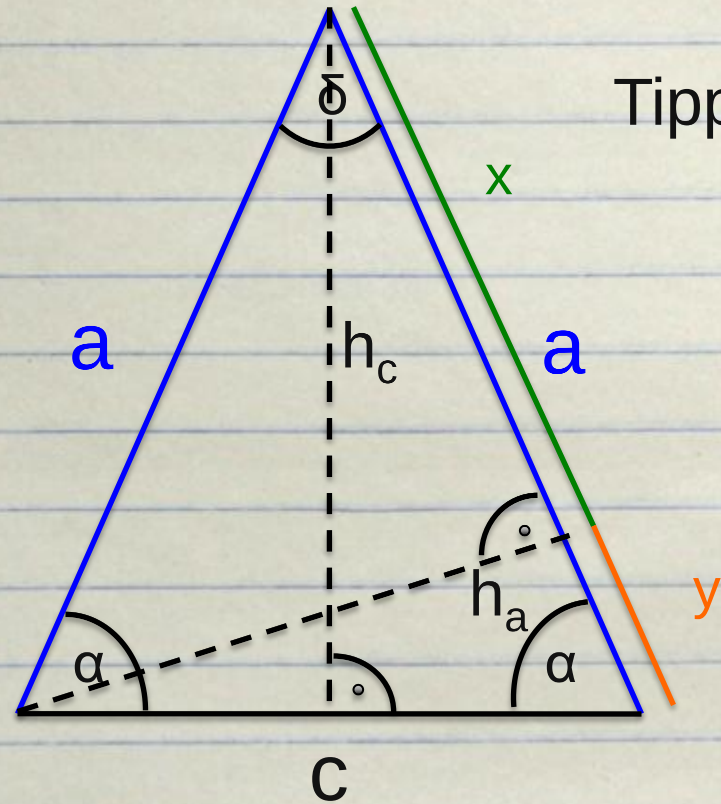
gesucht ist

$c=?$

$\delta=?$

$\alpha = ?$

Skizze



Tipp: h_a !

Lösung

$$A = \frac{a*h_a}{2}$$

$$h_a = \frac{A*2}{a}$$

$$h_a = \frac{54,6*2}{10,9}$$

$$h_a = 10,02cm$$

$$h_a^2+x^2 = a^2$$

$$x = \sqrt{a^2-h_a^2}$$

$$x = 4,29cm$$

$$a-x = y$$

$$y = 6,61cm$$

$$y^2+h_a^2 = c^2$$

$$c = \sqrt{y^2-h_a^2}$$

$$c = 12cm$$

Lösung

$\sin\alpha = \frac{h_a}{c}$

$\alpha = \sin^{-1}(\frac{h_a}{c})$

$\alpha = 56{,}61°$

$\delta = 180-2*56{,}61$

$\delta = 66{,}77°$

Da wir α berechnen wollen, müssen wir die Umkehrkehr-funktion von sin anwenden, welche $\sin^{-1}$ ist.

Das rechtwinkelige Dreieck II

Erklärung

Rechnung

Beispiele

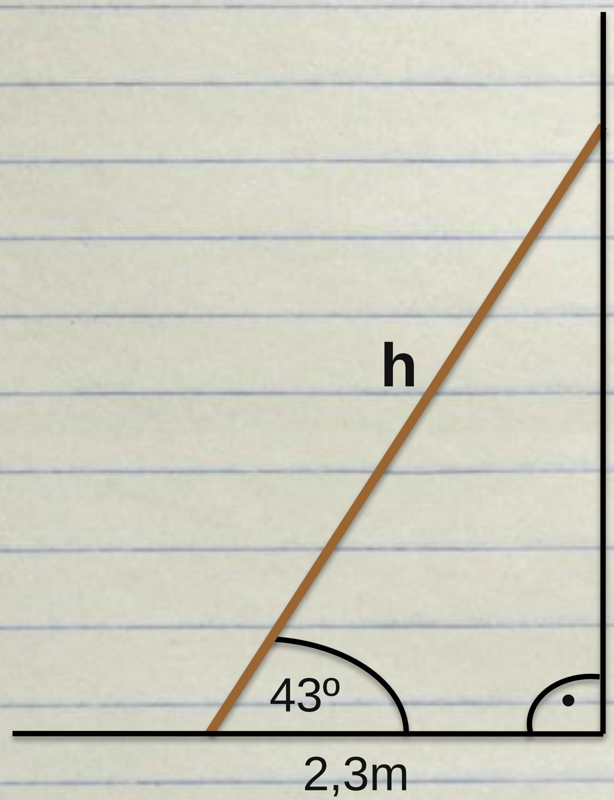
Textbeispiele

Wende an, was du gelernt hast!

Die Leiter

Eine Leiter ist h Meter hoch. Sie lehnt an einer Wand mit einem Neigungswinkel von 43º. Der Fuß der Leiter steht 2,3m von der Wand entfernt. Wie hoch ist die Leiter?

Skizze



Lösung

$$\cos 43^\circ = \frac{2{,}3}{h}$$

$$h = \frac{2{,}3}{\cos 43^\circ}$$

h=3,15m

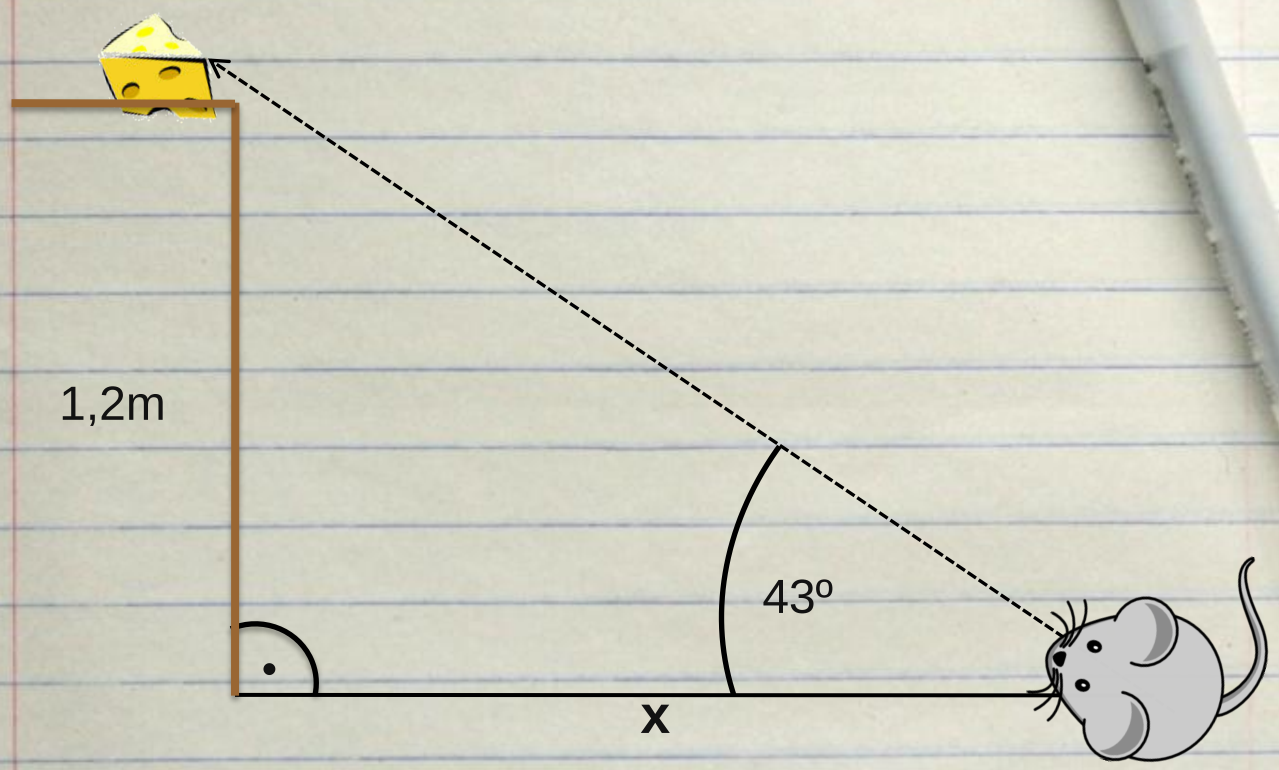
Die Leiter ist 3,15m hoch.

Die Maus

Eine Maus will zum Käse. Dieser befindet sich auf einem 1,2m hohen Tisch. Die Maus sieht den Käse mit einem Höhenwinkel von 43º. Wie viele Mäuselängen braucht sie um den Tisch zu erreichen?

Tipp: Die Maus ist 17cm lang.

Skizze



Lösung

$$\tan 43^\circ = \frac{1{,}2}{x}$$

$$x = \frac{1{,}2}{\tan 43^\circ}$$

$x = 1{,}28\,m$

$1{,}28 : 0{,}17 = 7{,}53$

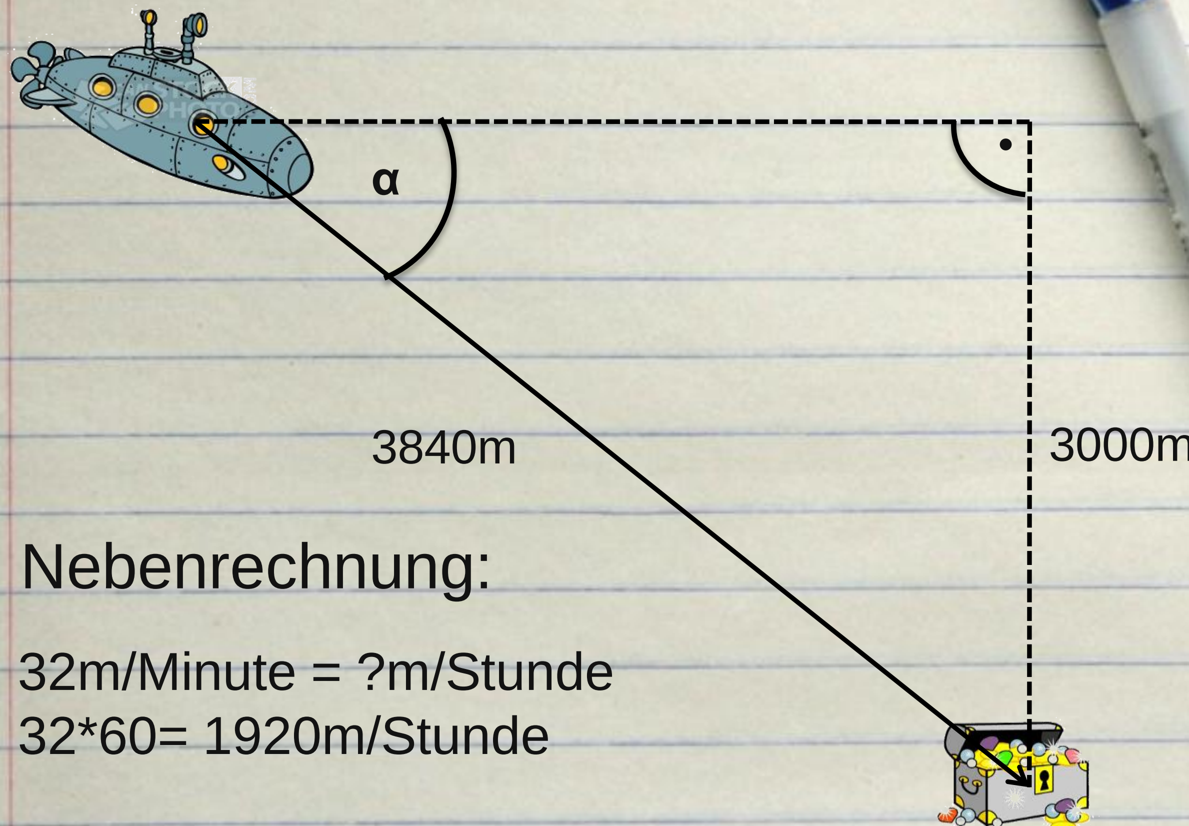
Die Maus ist 8 Mäuselängen vom Tisch entfernt.

Das U-Boot

Ein U-Boot möchte einen Punkt 3000m unter dem Meeresspiegel erreichen mit welchem Tiefenwinkel α muss es reisen, wenn es die Stelle nach 2 Stunden erreichen will?

Tipp: Das U-Boot reist 32m/Minute

Skizze



Nebenrechnung:

32m/Minute = ?m/Stunde
32*60= 1920m/Stunde

Reisemeter bei 2 Stunden: 3840m

Lösung

$$\sin\alpha = \frac{3000}{3840}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{3000}{3840}\right)$$

$$\boldsymbol{\alpha = 51{,}38^\circ}$$

Das U-Boot muss mit einem Tiefenwinkel von 51,38º reisen.

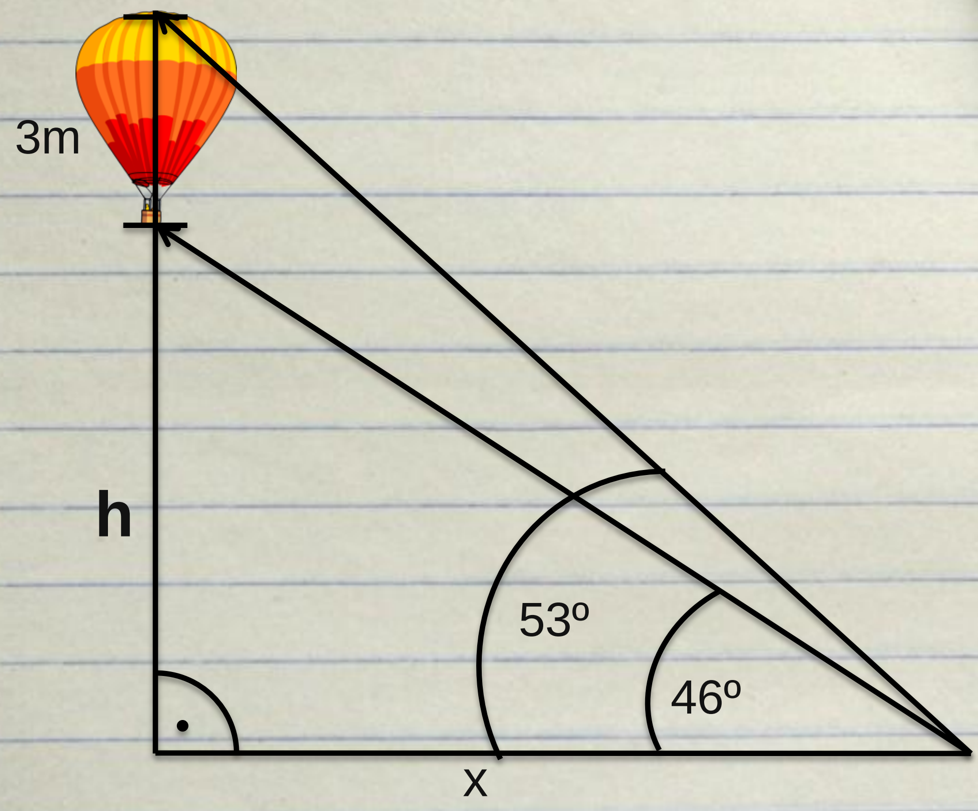
Der Heißluftballon

Ein 3m großer Heißluftballon fliegt in einer Höhe von h über dem Boden. Ein Beobachter betrachtet den höchsten Punkt des Ballons mit einem Höhenwinkel von 53º und den niedrigsten Punkt mit einem Höhenwinkel von 46º. Wie hoch fliegt der Ballon?

Tipps:

Die Höhe ist bis zum niedrigsten Punkt des Ballons zu berechnen. Der Beobachter ist auf einen Punkt zu reduzieren.

Skizze



Lösung

$\tan 46^\circ = \frac{h}{x}$ $\tan 53^\circ = \frac{3+h}{x}$

x ausdrücken:

$\tan 46^\circ = \frac{h}{x}$ $x = \frac{h}{\tan 46^\circ}$

Gleichung mit 2 Unbekannten:

$\tan 53^\circ = \frac{3+h}{\frac{h}{\tan 46^\circ}}$ $\tan 53^\circ = \frac{3\tan 46^\circ + h\tan 46^\circ}{h} \mid *h$

Lösung

$h\tan 53^\circ = 3\tan 46^\circ + h\tan 46^\circ \mid - h\tan 46^\circ$

$h\tan 53^\circ - h\tan 46^\circ = 3\tan 46^\circ$

$h\,(\tan 53^\circ - \tan 46^\circ) = 3\tan 46^\circ \mid :(\ )$

$h = \dfrac{3\tan 46^\circ}{\tan 53^\circ - \tan 46^\circ}$ **$h = 10{,}66$ m**

Der Heißluftballon fliegt in einer Höhe von 10,66m.

Your brain has now been officially upgraded!

Viel Spaß beim weiterlernen !!!